HOÀNG NGỌC ANH

NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN

VÀ ỨNG DỤNG

CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Tài liệu này được viết dành cho các bạn học sinh chuyên Toán, Toán-Tin, các thầy cô giáo dạy Toán và các bạn sinh viên Đại học, Cao Đẳng, các bạn trẻ yêu Toán.

VẤN ĐỀ 1: ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

AM-GM hay còn có tên gọi là bđt Cô-Si! Ứng dụng của bđt này rất đa dạng và phương pháp sử dụng bđt này khá hiệu quả trong việc chứng minh các bài toán bđt hai biến số hoặc ba biến số. Sau đây, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu những ích lợi của bđt được xem là một **công cụ mạnh** này.

Ví dụ 1.
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ và u,v là các số dương cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = ua^2 + vb^2 + c^2.$$

Lời giải.

Một cách tự nhiên từ lời giải của Bài toán 1, ta phân tích

$$u = x+y, v = z+t, 1 = m+n$$

trong đó x,y,z,t,m,n là các số dương sẽ chọn sau.

Áp dụng bất đẳng AM-GM cho 2 số dương, ta có

$$xa^2 + tb^2 \geq 2\sqrt{xt}ab,$$
$$ya^2 + nc^2 \geq 2\sqrt{yn}ca,$$
$$zb^2 + mc^2 \geq 2\sqrt{zm}bc.$$

Cộng vế các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$P \geq 2\sqrt{xt}ab + 2\sqrt{yn}ca + 2\sqrt{zm}bc.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xa^2 = tb^2 \\ ya^2 = nc^2 \\ zb^2 = mc^2 \end{cases}$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{x}{t} = \dfrac{b^2}{a^2} \\ \dfrac{n}{y} = \dfrac{a^2}{c^2} \Rightarrow xzn = ytm. \\ \dfrac{z}{m} = \dfrac{c^2}{b^2} \end{cases} \qquad (1)$$

Chọn x, y, z, t, m, n sao cho $xt = yn = zm = k^2$ thỏa mãn (1).

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)(z+t)(m+n) = uv$$

$$\Leftrightarrow (xz + xt + yz + yt)(m+n) = uv$$
$$\Leftrightarrow xzm + xtm + yzm + ytm + xzn + xtn + yzn + ytn = uv$$
$$\Leftrightarrow (x + y + m + n + z + t)k^2 + 2xzn = uv$$
$$\Leftrightarrow (u + v + 1)k^2 + 2xzn = uv$$

Mà $(xzn)(utm) = k^6$ nên $xzn = k^3$.

Do đó

$$2k^3 + (u+v+1)k^2 - uv = 0 \qquad (2)$$

Rõ ràng (2) có nghiệm dương duy nhất k_0.

Vậy $\min P = 2k_0$ với k_0 là nghiệm dương duy nhất của phương trình (2).

Ví dụ 2:
Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ và $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \prod_{1 \le i < j \le n} |x_i - x_j|.$$

Lời giải.

+ Trường hợp 1. $n = 2$ là trường hợp tầm thường vì lúc này $P = 1$ không đổi,

+ Trường hợp 2. $n = 3$, không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3$.

Áp dụng bất đẳngthức AM-GM cho 3 số không âm, ta có

$$\frac{P}{2} = (x_2 - x_1)\left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)(x_3 - x_2)$$

$$\le \left(\frac{(x_2 - x_1) + \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right) + (x_3 - x_2)}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)^3$$

$$\le \frac{1}{8}$$

Do đó $P \le \frac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ |x_3 - x_1| = |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 \\ x_2 - x_1 = \frac{x_3 - x_1}{2} = x_3 - x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy

$$\max P = \frac{1}{4}.$$

+ Trường hợp 3. $n = 4$, một cách tự nhiên ta dự đoán rằng $\max P$ đạt được khi

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Với giả thiết $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$.

Như vậy thì $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$.

Nếu xem hiệu $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ là đơn vị và đặt $x_3 - x_2 = a$, thì ta sẽ có bộ biến mà biểu thức P đạt max cần thỏa mãn điều kiện

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_4 - x_2}{a+1} = \frac{x_4 - x_1}{a+2}$$

Từ cách phân tích trên, lời giải của bài toán trong trường hợp $n = 4$ sẽ như sau

Với giả thiết $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$, ta có

$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

Do đó

$$\frac{P}{a(a+2)(a+1)^2}=$$

$$=(x_2-x_1).\frac{(x_3-x_1)}{a+1}.\frac{(x_4-x_1)}{a+2}.\frac{(x_3-x_2)}{a}.\frac{(x_4-x_2)}{a+1}.(x_4-x_3)$$

$$\leq\left(\frac{(x_2-x_1)+\frac{(x_3-x_1)}{a+1}+\frac{(x_4-x_1)}{a+2}+\frac{(x_3-x_2)}{a}+\frac{(x_4-x_2)}{a+1}+(x_4-x_3)}{6}\right)^6$$

$$=\left(\frac{(x_4-x_1)\left(1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\right)+\left(-1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)(x_3-x_2)}{6}\right)^6$$

Ta chọn $a>0$ sao cho

$$1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}=-1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}$$

hay $a=\sqrt{2}-1$. Khi đó,

$$1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}=-1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

và ta thu được

$$\frac{P}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}\right)^2}\leq\left(\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}.(-x_1-x_2+x_3+x_4)}{6}\right)^6\leq\frac{1}{2^9}$$

hay $P\leq\frac{1}{2^8}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ |-x_1-x_2+x_3+x_4|=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=1 \\ x_2-x_1=x_4-x_3=\frac{x_3-x_2}{\sqrt{2}-1}=\frac{x_3-x_1}{\sqrt{2}}=\frac{x_4-x_2}{\sqrt{2}}=\frac{x_4-x_1}{\sqrt{2}+1}\geq 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được $\begin{cases} x_4 = -x_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ x_3 = -x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Kết luận

$$maxP = \frac{1}{2^8}.$$

+ Trường hợp 4. $n = 5$.

Phân tích.

Với giả thiết $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$, từ lời giải của các trường hợp 2 và 3, một cách tự nhiên, ta nghĩ ngay rằng bộ số để P đạt max là $x_5 = -x_1, x_4 = -x_2, x_3 = 0$.

Do vậy $x_5 - x_4 = x_2 - x_1, x_3 - x_2 = x_4 - x_3$, từ đó ta có thể đoán nhận rằng nếu xem hiệu $x_2 - x_1$ bằng đơn vị và $x_3 - x_2$ bằng a thì bộ số để P đạt max cần phải thỏa điều kiện

$$\frac{x_2 - x_1}{1} = \frac{x_4 - x_3}{a} = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_5 - x_3}{a+1} =$$
$$= \frac{x_4 - x_2}{2a} = \frac{x_5 - x_2}{2a+1} = \frac{x_4 - x_1}{2a+1} = \frac{x_5 - x_1}{2a+2} = \frac{x_5 - x_4}{1}$$

Từ cách phân tích trên, lời giải của bài toán trong trường hợp $n = 5$ sẽ như sau

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$, từ đó suy ra

$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_5 - x_1)(x_3 - x_2) \text{x}$$
$$\text{x}(x_4 - x_2)(x_5 - x_2)(x_4 - x_3)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)$$

Xét biểu thức

$$Q = \frac{P}{4a^2(a+1)^3(2a+1)^2}$$

Viết Q dưới dạng

$$Q = \frac{(x_2 - x_1)}{1}.\frac{(x_3 - x_1)}{a+1}.\frac{(x_4 - x_1)}{2a+1}.\frac{(x_5 - x_1)}{2a+2}.\frac{(x_3 - x_2)}{a} \text{x}$$
$$\text{x}\frac{(x_4 - x_2)}{2a}.\frac{(x_5 - x_2)}{2a+1}.\frac{(x_4 - x_3)}{a}.\frac{(x_5 - x_3)}{a+1}.\frac{(x_5 - x_4)}{1}$$

Áp dụng bất đẳngthức AM–GM cho 10 số không âm, ta có

$$Q \le \frac{1}{10^{10}}\left(\frac{(x_2-x_1)}{1}+\frac{(x_3-x_1)}{a+1}+\frac{(x_4-x_1)}{2a+1}+\frac{(x_5-x_1)}{2a+2}+\frac{(x_3-x_2)}{a}+\right.$$

$$\left.+\frac{(x_4-x_2)}{2a}+\frac{(x_5-x_2)}{2a+1}+\frac{(x_4-x_3)}{a}+\frac{(x_5-x_3)}{a+1}+\frac{(x_5-x_4)}{1}\right)^{10}$$

$$=\frac{1}{10^{10}}\left((x_5-x_1)\left(1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2(a+1)}\right)+(x_4-x_2)\left(-1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2a}\right)\right)^{10}$$

Chọn $a>0$ sao cho

$$1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2(a+1)}=-1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2a}$$

hay $a=\frac{1}{2}$. Khi đó,

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{3}{2(a+1)}=-1+\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{3}{2a}=\dfrac{5}{2} \\ Q=\dfrac{4P}{27} \end{cases}$$

Từ đây, ta thu được

$$Q \le \frac{1}{10^{10}}.\left(\frac{5}{2}.(-x_1-x_2+x_4+x_5)\right)^{10} \le \frac{1}{2^{20}}$$

Do đó $P \le \dfrac{27}{2^{22}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ |-x_1-x_2+x_4+x_5|=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|=1 \\ x_2-x_1=\dfrac{2(x_3-x_1)}{3}=\dfrac{x_4-x_1}{2}=\dfrac{x_5-x_1}{3}=2(x_3-x_2)= \\ =x_4-x_2=\dfrac{x_5-x_2}{2}=2(x_4-x_3)=\dfrac{2(x_5-x_3)}{3}=x_5-x_4\ge 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được $\begin{cases} x_1 = -x_5 = -\dfrac{3}{8} \\ x_2 = -x_4 = -\dfrac{1}{8} \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Kết luận

$$\max P = \frac{27}{2^{22}}.$$

Nhận xét.

Bằng phương pháp tương tự sẽ tìm được lời giải của bài toán với $n \geq 6$.

Ví dụ 3.(*Võ Quốc Bá Cẩn*)

Cho m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác cho trước và tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \mathrm{tg}^m A.\mathrm{tg}^n B.\mathrm{tg}^p C.$$

Lời giải.

Xét biểu thức

$$Q = \frac{1}{P} = \mathrm{cotg}^m A.\mathrm{cotg}^n B.\mathrm{cotg}^p C.$$

Bài toán đã cho tương đương với tìm max của Q.

Khi nhìn thấy biểu thức Q, ít nhiều ta cũng nghĩ đến đẳng thức quen thuộc

$$\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C + \mathrm{cotg}C.\mathrm{cotg}A = 1$$

Và từ đây, ta nghĩ ngay rằng bài này có thể dùng bất đẳng AM-GM suy rộng, do đó ta đưa vào các tham số dương x, y, z (chọn sau) sao cho

$$\begin{aligned} Q &= (\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B)^x.(\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C)^y.(\mathrm{cotg}C.\mathrm{cotg}A)^z \\ &= (\mathrm{cotg}A)^{x+z}.(\mathrm{cotg}B)^{x+y}.(\mathrm{cotg}C)^{y+z}. \end{aligned}$$

Ta phải chọn x, y, z sao cho

$$\begin{cases} x+z=m \\ x+y=n \\ y+z=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}.(m+n-p) \\ y=\dfrac{1}{2}.(-m+n+p) \\ z=\dfrac{1}{2}.(m-n+p) \end{cases}.$$

Từ đây, ta có

$$\frac{Q}{x^x y^y z^z}=\left(\frac{\text{cotg}A.\text{cotg}B}{x}\right)^x.\left(\frac{\text{cotg}B.\text{cotg}C}{y}\right)^y.\left(\frac{\text{cotg}C.\text{cotg}A}{z}\right)^z$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng, ta có

$$\frac{Q}{x^x y^y z^z}\le$$

$$\le\frac{1}{(x+y+z)^{x+y+z}}.\left(x\left(\frac{\text{cotg}A.\text{cotg}B}{x}\right)+y\left(\frac{\text{cotg}B.\text{cotg}C}{y}\right)+z\left(\frac{\text{cotg}C.\text{cotg}A}{z}\right)\right)^{x+y+z}$$

$$=\frac{1}{(x+y+z)^{x+y+z}}$$

Do đó $Q\le\dfrac{x^x y^y z^z}{(x+y+z)^{x+y+z}}$

Suy ra

$$P\ge\frac{(x+y+z)^{x+y+z}}{x^x y^y z^z}=\sqrt{\frac{(m+n+p)^{m+n+p}}{(-m+n+p)^{-m+n+p}(m-n+p)^{m-n+p}(m+n-p)^{m+n-p}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\text{cotg}A.\text{cotg}B}{x}=\frac{\text{cotg}B.\text{cotg}C}{y}=\frac{\text{cotg}C.\text{cotg}A}{z}.$$

Hay

$$\begin{cases} \text{cotg}A=\sqrt{\dfrac{xz}{y(x+y+z)}}=\sqrt{\dfrac{(m-n+p)(m+n-p)}{(-m+n+p)(m+n+p)}} \\ \text{cotg}B=\sqrt{\dfrac{xy}{z(x+y+z)}}=\sqrt{\dfrac{(-m+n+p)(m+n-p)}{(m-n+p)(m+n+p)}} \\ \text{cotg}C=\sqrt{\dfrac{yz}{x(x+y+z)}}=\sqrt{\dfrac{(m-n+p)(-m+n+p)}{(m+n-p)(m+n+p)}} \end{cases}$$

Kết luận

$$\min P=\sqrt{\frac{(m+n+p)^{m+n+p}}{(-m+n+p)^{-m+n+p}(m-n+p)^{m-n+p}(m+n-p)^{m+n-p}}}.$$

Ví dụ 4. TST-2001
Cho $a,b,c>0$ và $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}.$$

Lời giải.

Phân tích. Để đơn giản, ta sẽ đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{2}{b}, z=\frac{3}{c}$ thì ta nhận được một bài toán tương đương như sau

"$x,y,z>0$ và $6x+12y+21z\le 6xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x+y+z."$$

Nhận thấy từ giả thiết $6x+12y+21z\le 6xyz$, ta có thể suy ra được

$$x^m y^n z^p \ge k\ (m,n,p>0)$$

Do đó ta nghĩ ngay rằng bài này có thể sử dụng bất đẳng AM-GM suy rộng được.

Thật vậy

$$P=m.\frac{x}{m}+n\frac{y}{n}+p.\frac{z}{p}$$

$$\ge (m+n+p)\left(\left(\frac{x}{m}\right)^m.\left(\frac{y}{n}\right)^n.\left(\frac{z}{p}\right)^p\right)^{\frac{1}{m+n+p}}$$

$$\ge (m+n+p)\left(\frac{k}{m^m n^n p^p}\right)^{\frac{1}{m+n+p}}$$

Như vậy, nhiệm vụ của ta bây giờ chỉ là phải tìm m,n,p nữa thôi.

Rõ ràng, ta chỉ cần xét $m+n+p=1$ là đủ. Khi đó, ta có

$$6xyz\ge 6x+12y+21z$$

$$=6m.\frac{x}{m}+12n.\frac{y}{n}+21p.\frac{z}{p}$$

$$\geq (6m+12n+21p)\left(\left(\frac{x}{m}\right)^{6m}.\left(\frac{y}{n}\right)^{12n}.\left(\frac{z}{p}\right)^{21p}\right)^{\frac{1}{6m+12n+21p}}$$

Để tìm m,n,p ta cần phải giải hệ sau $\begin{cases} 1-\dfrac{6m}{6m+12n+21p}=km \\ 1-\dfrac{12n}{6m+12n+21p}=kn \\ 1-\dfrac{21p}{6m+12n+21p}=kp \\ m+n+p=1 \end{cases}$

Hay

$$\begin{cases} 1-\dfrac{6m}{6m+12n+21p}=2m \\ 1-\dfrac{12n}{6m+12n+21p}=2n \\ 1-\dfrac{21p}{6m+12n+21p}=2p \\ m+n+p=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1-n-p \\ 4n^2+10np+6n-5p=2 \\ 5p^2+2np-n+3p=1 \end{cases}$$

Xét hệ (*) $\begin{cases} 4n^2+10np+6n-5p=2 \\ 5p^2+2np-n+3p=1 \end{cases}$

Đặt $n=tp$ $(t>0)$, hệ (*) trở thành $\begin{cases} (2t+5)p^2+(3-t)p=1 & (1) \\ (4t^2+10t)p^2+(6t-5)p=2 & (2) \end{cases}$

Lấy $(2)-2\text{x}(1)$, ta được

$$p((4t^2+6t-10)p+8t-11)=0$$

Nếu $t=1$ thì hệ (*) vô nghiệm, do đó $t\neq 1$.

$$\Rightarrow p=\frac{11-8t}{4t^2+6t-10} \qquad (3)$$

Do $p>0,t>0$ nên $1<t<\dfrac{11}{8}$. Thay (3) vào (1) và thu gọn, ta được

$$16t^4-12t^3-146t^2+30t+175=0$$

$$\Leftrightarrow (4t-5)(2t+5)(2t^2-4t-7)=0$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{5}{4}\ \text{(do } 1<t<\frac{11}{8})$$

Từ đó, ta có $\begin{cases} m=\dfrac{2}{5} \\ n=\dfrac{1}{3} \\ p=\dfrac{4}{15} \end{cases}$. Thử lại, ta thấy thỏa.

Đẳng thức ở trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{p} \\ 6x+12y+21z=5xyz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x}{2}=3y=\dfrac{15z}{4} \\ 6x+12y+21z=5xyz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{4}{5} \\ c=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Từ các phân tích và chọn tham số trên, ta đi đến một lời giải cực kỳ đơn giản như sau

Đặt $a=\dfrac{1}{3x}, b=\dfrac{4}{5y}, c=\dfrac{3}{2z}$, bài toán chuyển về

“$x,y,z>0$ và $3x+5y+7z\le 15xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2}.(6x+5y+4z).”$$

Áp dụng bất đẳng AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$15xyz \geq 3x + 5y + 7z \geq 15\sqrt[15]{x^3y^5z^7}$$
$$\Rightarrow \sqrt[15]{x^{12}y^{10}z^8} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[15]{x^6y^5z^4} \geq 1$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$P = \frac{1}{2}.(6x+5y+4z) \geq \frac{15}{2}.\sqrt[15]{x^6y^5z^4} \geq \frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y = z \\ 15xyz = 3x+5y+7z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{4}{5} \\ c = \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Kết luận

$$\min P = \frac{15}{2}.$$

VẤN ĐỀ 2: BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz hay còn có tên gọi quen thuộc là bất đẳng thức Bunhiacôpxky, là một bất đẳng thức thường áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học, chẳng hạn có trong đại số tuyến tính dùng cho các vector, trong giải tích dùng cho các chuỗi vô hạn và tích phân của các tích, trong lý thuyết sác xuất dùng cho các phương sai và hiệp phương sai. Bất đẳng thức này có rất nhiều cách chứng minh, nhưng tôi không đi sâu vào phần này mà chỉ khai thác triệt để công dụng của nó.

1. Những kĩ thuật sử dụng bđt Cauchy-Schwarz dạng cộng mẫu số

Bài toán 1: Cho a, b, c là các số thực dương. CMR:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải:

Cách 1:

Dùng bđt cauchy-schwarz dạng cộng mẫu số ta được

$$VT \geq \frac{\cancel{(a+b+c)^2}}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{ĐPCM}$$

Dấu "=" xảy ra khi a=b=c.

Cách 2: Dùng bđt Cô-si ta có

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a$. Tương tự ta cũng có:

$\frac{b^2}{a+c}+\frac{a+c}{4}\geq b$

$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq c$. Cộng 3 bđt này lại ta được ĐPCM.

Dấu "=" xảy ra khi a=b=c.

Tuy nhiên nhìn qua bđt ở đề bài, ta nên nghĩ ngay cách 1!

Bài toán 2: CMR: Nếu a, b, c là các số thực dương thì

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1. \text{ (CSM-1999)}$$

Lời giải:

Khi đọc lướt qua bài trên ta cảm thấy không giống với dạng toán bài 1 vì trên tử không có bình phương. Nhưng ta có thể giải quyết gọn gàng thông qua việc làm cho tử số của bài toán xuất hiện bình phương:

Ta có: $VT=\frac{a^2}{a(b+2c)}+\frac{b^2}{b(c+2a)}+\frac{c^2}{c(a+2b)}$

Áp dụng bđt cộng mẫu số ta có: $VT\geq\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$

Đến đây ta cần chứng minh: $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$. Đây là một kết quả quen biết!

Dấu "=" xảy ra khi a=b=c.

2. Mộ số kỹ thuật khác

Bài 1: Cho x,y,z là ba số dương thỏa $4x+9y+16z=49$. Chứng minh rằng:

$$T=\frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{64}{z}\geq 49$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho sáu số $2\sqrt{x};3\sqrt{y};4\sqrt{z}$ và $\frac{1}{\sqrt{x}};\frac{5}{\sqrt{y}};\frac{8}{\sqrt{z}}$ ta được:

$$49.T=(4x+9y+16z)\left(\frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{84}{z}\right)=\left[\left(2\sqrt{x}\right)^2+\left(3\sqrt{y}\right)^2+\left(4\sqrt{z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{8}{\sqrt{z}}\right)^2\right]$$

$$\geq\left(2\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt{y}.\frac{5}{\sqrt{y}}+4\sqrt{z}.\frac{8}{\sqrt{z}}\right)^2=49^2$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{x}+\frac{25}{y}+\frac{64}{z}\geq 49$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{2x}=\frac{5}{3y}=\frac{8}{4z}\\ 4x+9y+16z=49\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{5}{3}\\ z=2\end{cases}$

Bài 2 : Cho $x>0; y>0$ và $x^2+y^2\le x+y$ .Chứng minh:

$$x+3y\le 2+\sqrt{5}$$

Hướng dẫn giải

Giả thiết: $x^2+y^2\le x+y \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số: $(1;3);\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2}\right)$ ta có:

$$\left[1.\left(1-\frac{1}{2}\right)+3.\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]^2\le 10\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]\le 5$$

$$\Rightarrow (x+3y-2)^2\le 5$$

$$\Rightarrow x+3y-2\le\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x+3y\le 2+\sqrt{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10} \\ y=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10}\end{cases}$

Bài 3 : Cho $a,b,c\ge 0$; $a+b+c=1$ .Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\ge 30$$

Hướng dẫn giải

Gọi $A=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\frac{1}{\sqrt{ab}};\frac{1}{\sqrt{bc}};\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2};3\sqrt{ab};3\sqrt{bc};3\sqrt{ca}\right)$$

Ta có: $(1+3+3+3)^2\le\left(a^2+b^2+c^2+9ab+9bc+9ca\right)A$

$\Rightarrow 100\le\left[(a+b+c)^2+7(ab+bc+ca)\right]A \quad (*)$

Mà $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$(do $a+b+c=1$)

Do đó: (*) $\Rightarrow A\ge 30$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 4 : Cho $x;y;z>0$ và thoả $x+y+z\le 1$ .Chứng minh : $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$

Hướng dẫn giải

Gọi $S=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\dfrac{1}{z^2}}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số: $(1;9);\left(x;\dfrac{1}{x}\right)$

Ta có: $$x+\frac{9}{x}\le\sqrt{1+81}.\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{82}.\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \qquad (1)$$

Tương tự: $$y+\frac{9}{y}\le\sqrt{82}.\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} \qquad (2)$$

$$z+\frac{9}{z}\le\sqrt{82}.\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \qquad (3)$$

Cộng (1),(2) và (3) theo vế ta được: $S.\sqrt{82}\ge x+y+z+9\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

Hay $$S.\sqrt{82}\ge 81(x+y+z)+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-80(x+y+z)$$

$$\ge 2.9.3.\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}-80\ge 162-80=82$$

Vậy $$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$$

Bài 5 : Cho ba số thực dương a,b,c thoả $ab+bc+ca=abc$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}=\sqrt{\dfrac{b^2+2a^2}{a^2b^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+2\dfrac{1}{b^2}}$ (do a,b dương)

Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{1}{b};z=\dfrac{1}{c}$ thì

giả thiết $\begin{cases}a,b,c>0\\ab+bc+ca=abc\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x;y;z>0\\x+y+z=1\end{cases}$

và (đpcm) $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{y^2+2z^2}+\sqrt{z^2+2x^2}\ge\sqrt{3}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$3(x^2+2y^2)=3(x^2+y^2+y^2)\ge(x+y+y)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+2y^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2y)$$

Tương tự $$\sqrt{y^2+2z^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}(y+2z)$$

$$\sqrt{z^2+2x^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}(z+2x)$$

Vậy $$\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{y^2+2z^2}+\sqrt{z^2+2x^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}(3x+3y+3z)=\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Với $x = y = z = \frac{1}{3}$ thì $a = b = c = 3$

Bài 6 : Chứng minh: $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$ với mọi số thực dương $a;b;c \ge 1$

Hướng dẫn giải

Đặt $a-1 = x^2; b-1 = y^2; c-1 = z^2$

Với $x;y;z > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$x+y+z \le \sqrt{(z^2+1)\left[(x^2+1)(y^2+1)+1\right]}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$x+y \le \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \Rightarrow x+y+z \le \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+z$

$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+z \le \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)+1}.\sqrt{z^2+1}$

Kết hợp (1) và (2) ta có $x+y+z \le \sqrt{(z^2+1)\left[(x^2+1)(y^2+1)+1\right]}$

Vậy $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$ (đpcm)

Bài 7 : Cho $a;b;c > 0$ và thoả $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c} \Rightarrow xyz = 1; x > 0; y > 0; z > 0$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau : A=$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số : $\left(\sqrt{y+z};\sqrt{z+x};\sqrt{x+y}\right);\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}};\frac{y}{\sqrt{z+x}};\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$

Ta có: $(x+y+z)^2 \le (y+z+z+x+x+y)A$

$\Rightarrow A \ge \frac{x+y+z}{2} \ge \frac{3}{2}.\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}(\text{do } xyz = 1) \quad \Rightarrow A \ge \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$

Với $x = y = z = 1$ thì $a = b = c = 1$.

Bài 8 : Cho $a;b;c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le 1$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số: $\left(\sqrt{a};\sqrt{b}\right);\left(\sqrt{c};\sqrt{a}\right)$

Ta có:

$$\left(\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\right)^2 \le (a+b)(c+a) \Rightarrow \sqrt{ac}+\sqrt{ab} \le \sqrt{(a+b)(c+a)}$$

$$\Rightarrow a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab} \le a+\sqrt{(a+b)(c+a)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \frac{a}{a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \qquad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}} \le \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \qquad (2)$$

$$\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \qquad (3)$$

Cộng (1),(2) và (3) theo vế ta được:

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le 1$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 9 : Cho $a;b>0$ và thoả $a^2+b^2=9$ .Chứng minh : $\dfrac{ab}{a+b+3} \le \dfrac{3\sqrt{2}-3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $a^2+b^2=9$

$\Leftrightarrow 2ab=(a+b)^2-9$

$\Leftrightarrow 2ab=(a+b+3)(a+b-3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2ab}{a+b+3}=a+b-3$

$\Leftrightarrow \dfrac{ab}{a+b+3}=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{3}{2}$

Mà theo BĐT Bunhiacôpxki thì $a+b \le \sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{2}$

Nên $\dfrac{ab}{a+b+3} \le \dfrac{3\sqrt{2}-3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a;b>0 \\ a^2+b^2=9 \Leftrightarrow a=b=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ a=b \end{cases}$

Bài 10: Cho $a;b;c;d$ dương tuỳ ý.Chứng minh : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{p+q}{pa+qb}+\dfrac{p+q}{pb+qc}+\dfrac{p+q}{pc+qa}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có

$$(p+q)^2=\left(\sqrt{\frac{p}{a}}.\sqrt{pa}+\sqrt{\frac{q}{b}}.\sqrt{qb}\right)^2 \le \left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right)(pa+qb)$$

Tương tự ta chứng minh được

$$(p+q)^2 \le \left(\frac{p}{b}+\frac{q}{c}\right)(pb+qc)\ ; \quad (p+q)^2 \le \left(\frac{p}{c}+\frac{q}{a}\right)(pc+qa)$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức ta có :

$$(p+q)^2\left[\frac{1}{pa+qb}+\frac{1}{pb+qc}+\frac{1}{pc+qa}\right] \le (p+q)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hay
$$(p+q)\left[\frac{1}{pa+qb}+\frac{1}{pb+qc}+\frac{1}{pc+qa}\right] \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{p+q}{pa+qb}+\frac{p+q}{pb+qc}+\frac{p+q}{pc+qa}$$

Bài 11 : Cho 4 số dương $a;b;c;d$ .Chứng minh:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{b+d+a}+\frac{d^3}{a+b+c} \ge \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $P=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{b+d+a}+\frac{d^3}{a+b+c}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số:

$$\left(\sqrt{\frac{a^3}{b+c+d}};\sqrt{\frac{b^3}{c+d+a}};\sqrt{\frac{c^3}{b+d+a}};\sqrt{\frac{d^3}{a+b+c}}\right);\left(\sqrt{a(b+c+d)};\sqrt{b(c+d+a)};\sqrt{c(d+b+a)};\sqrt{d(a+b+c)}\right)$$

Ta có:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \le P\left[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)\right]$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \le P\left[(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)\right] \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 2 bộ số: $(a;b;c;d);(1;1;1;1)$ ta được:

$$(a+b+c+d)^2 \le 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được
$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \le 3P(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \le 3P$$

Vậy
$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{b+d+a}+\frac{d^3}{a+b+c} \ge \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}$$

Bài 12 : Cho các số dương $a;b;c$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh : $\frac{a}{1+b-a}+\frac{b}{1+c-b}+\frac{c}{1+a-c} \ge 1$

Hướng dẫn giải

Đặt $A=\frac{a}{1+b-a}+\frac{b}{1+c-b}+\frac{c}{1+a-c}=\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$(a+b+c)^2=\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2b+c}}\sqrt{a(2b+c)}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2c+a}}\sqrt{b(2c+a)}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2a+b}}\sqrt{c(2a+b)}\right]^2$$

$$\le\left[\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\right]\left[a(2b+c)+b(2c+a)+c(2a+b)\right]$$

$$\Leftrightarrow A \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Ta lại có:

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Suy ra $A \geq \dfrac{3(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} = 1$

Vậy $\dfrac{a}{1+b-a} + \dfrac{b}{1+c-b} + \dfrac{c}{1+a-c} \geq 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2b+c = 2c+a = 2a+b \\ a = b = c \\ a+b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Vấn đề 3. BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT

1. Mở đầu

Hầu hết các bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Bunhiacopsky, Holder, Minkowsky, Chebysev ...) đều là các bất đẳng thức thuần nhất. Điều này hoàn toàn không ngẫu nhiên. Về logích, có thể nói rằng, chỉ có các đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh với nhau một cách toàn cục được.

Chính vì thế, bất đẳng thức thuần nhất chiếm một tỷ lệ rất cao trong các bài toán bất đẳng thức, đặc biệt là bất đẳng thức đại số (khi các hàm số là hàm đại số, có bậc hữu hạn). Đối với các hàm giải tích (mũ, lượng giác, logarith), các bất đẳng thức cũng được coi là thuần nhất vì các hàm số có bậc ∞ (theo công thức Taylor).

Trong bài này, chúng ta sẽ đề cập tới các phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức thuần nhất, cũng như cách chuyển từ một bất đẳng thức không thuần nhất về một bất đẳng thức thuần nhất. Nắm vững và vận dụng nhuần nhuyễn các phương pháp này, chúng ta có thể chứng minh được hầu hết các bất đẳng thức sơ cấp.

2. Bất đẳng thức thuần nhất

Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của các biến số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được là hàm thuần nhất bậc α nếu với mọi số thực t ta có

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^{\alpha} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Bất đẳng thức dạng

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$$

với f là một hàm thuần nhất được gọi là bất đẳng thức thuần nhất (bậc α).

Ví dụ các bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunhiacopsky, bất đẳng thức Chebyshev là các bất đẳng thức thuần nhất. Bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức $\sin x < x$ với $x > 0$ là các bất đẳng thức không thuần nhất.

3. Chứng minh bất đẳng thức thuần nhất

3.1. Phương pháp dồn biến

Đặc điểm của nhiều bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức đại số là dấu bằng xảy ra khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau (xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 \geq 0$!). Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm số biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad (1)$$

Ta có thể thử chứng minh

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f((x_1+x_2)/2, (x_1+x_2)/2, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2}, \ldots, x_n) \qquad (3)$$

Sau đó chuyển việc chứng minh (1) về việc chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n) = g(x_1, x_3, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad (4)$$

tức là một bất đẳng thức có số biến ít hơn. Dĩ nhiên, các bất đẳng thức (2), (3) có thể không đúng hoặc chỉ đúng trong một số điều kiện nào đó. Vì ta chỉ thay đổi 2 biến số nên thông thường thì tính đúng đắn của bất đẳng thức này có thể kiểm tra được dễ dàng.

Ví dụ 1: Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

Giải: Xét hàm số $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b)$

Ta có

$f(a, b, c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - a^3 - (b+c)^3/4 - 3a(b+c)^2/4 + a^2(b+c) + a(b+c)^2/2 + (b+c)^3/4 = (b+c-5a/4)(b-c)^2$.

Do đó, nếu $a = \min\{a, b, c\}$ (điều này luôn có thể giả sử) thì ta có

$f(a, b, c) \geq f(a, (b+c)/2, (b+c)/2)$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh $f(a, b, b) \geq 0$. Nhưng bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3 + 2b^3 + 3ab^2 - (a^2b + a^2b + b^2a + b^3 + b^2a + b^3) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a^3 + ab^2 - 2a^2b \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a(a-b)^2 \geq 0.$$

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng

$$F(a,b,c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - (4/7)(a^4+b^4+c^4) \geq 0$$

(Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam 1996)

Giải: Ta có

$F(a, b, c) - F(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - (4/7)(a^4+b^4+c^4) - 2(a+(b+c)/2)^4 - (b+c)^4 + (4/7)(a^4+2((b+c)/2)^4) = (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2(a+(b+c)/2)^4 + c(4/7)((b+c)^4/8 - b^4 - c^4) = a(4b^3+4c^3-(b+c)^3) + 3a^2(2b^2+c^2-(b+c)^2) + (3/7)(b^4+c^4-(b+c)^4/8) = 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + (3/56)(b-c)^2[7b^2+7c^2+10bc] = 3a(a+b+c)(b-c)^2 + (3/56)(b-c)^2[7b^2+7c^2+10bc]$.

Số hạng cuối cùng luôn không âm. Nếu a, b, c cùng dấu thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên. Nếu a, b, c không cùng dấu thì phải có ít nhất 1 trong ba số a, b, c cùng dấu với a+b+c. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là a. Từ đẳng thức trên suy ra $F(a, b, c) \geq F(a, (b+c)/2, (b+c)/2)$. Như vậy ta chỉ còn cần chứng minh:

$F(a, b, b) \geq 0$ với mọi a, b, hay là

$$2(a+b)^4 + (2b)^4 - (4/7)(a^4+2b^4) \geq 0$$

Nếu b = 0 thì bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $b \neq 0$, chia hai vế của bất đẳng thức cho b^4 rồi đặt $x = a/b$ thì ta được bất đẳng thức tương đương

$$2(x+1)^4 + 16 - (4/7)(x^4+2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng có thể chứng minh như sau

Xét $f(x) = 2(x+1)^4 + 16 - (4/7)(x^4+2)$

Ta có $f'(x) = 8(x+1)^3 - (16/7)x^3$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = (2/7)^{1/3}x \Leftrightarrow x = -2.9294$.

$f_{min} = f(-2.9294) = 2(-1.9294)^4 + 16 - (4/7)(-2.9294)^4 - 8/7 = 0.4924$

(Các phần tính toán cuối được tính với độ chính xác tới 4 chữ số sau dấu phẩy. Do f_{min} tính được là 0.4924 nên nếu tính cả sai số tuyệt đối thì giá trị chính xác của f_{min} vẫn là một số dương. Vì đây là một bất đẳng thức rất chặt nên không thể tránh được các tính toán với số lẻ trên đây. Chẳng hạn nếu thay 4/7 bằng 16/27 để $x_{min} = -3$ thì f^*_{min} có giá trị âm! Ở đây $f^*(x) = 2(x+1)^4 + 16 - (16/27)x^4 - 8/7$.)

3.2. Phương pháp chuẩn hóa

Dạng thường gặp của bất đẳng thức thuần nhất là

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

trong đó f và g là hai hàm thuần nhất cùng bậc. Do tính chất của hàm thuần nhất, ta có thể chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về việc chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq A$ với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A$. Chuẩn hóa một cách thích hợp, ta có thể làm đơn giản các biểu thức của bất đẳng thức cần chứng minh, tận dụng được một số tính chất đặc biệt của các hằng số.

Ví dụ :

Cho bộ n số thực dương $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Với mỗi số thực r ta đặt

$$M_r(x) = [(x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r)/n]^{1/r}$$

Chứng minh rằng với mọi r>s>0 ta có $M_r(x) \geq M_s(x)$.

(Bất đẳng thức về trung bình lũy thừa)

Giải: Vì $M_r(tx) = tM_r(x)$ với mọi t>0 nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng cho các số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $M_s(x) = 1$, tức là cần chứng minh $M_r(x) \geq 1$ với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $M_s(x) = 1$. Điều này có thể viết đơn giản lại là

Chứng minh $x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r \geq n$ với $x_1^s + x_2^s + \ldots + x_n^s = n$.

Để chứng minh bất đẳng thức cuối cùng, ta áp dụng bất đẳng thức Bernoulli:

$$x_i^r = (x_i^s)^{r/s} = [1 + (x_i^s-1)]^{r/s} \geq 1 + (r/s)(x_i^s-1),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với x, y, z là các số thực bất kỳ ta có bất đẳng thức

$$6(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 27xyz + 10(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

(Đề thi Học sinh giỏi quốc gia năm 2002)

Giải: Bất đẳng thức này rất cồng kềnh. Nếu thức hiện phép biến đổi trực tiếp sẽ rất khó khăn (ví dụ thử bình phương để khử căn). Ta thực hiện phép chuẩn hóa để đơn giản hóa bất đẳng thức đã cho. Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ thì $x = y = z = 0$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Nếu $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, do bất đẳng thức đã cho là thuần nhất, ta có thể giả sử $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Ta cần chứng minh $2(x+y+z) \leq xyz + 10$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chứng minh

$$[2(x+y+z) - xyz]^2 \leq 100$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $|x| \le |y| \le |z|$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky, ta có

$[2(x+y+z) - xyz]^2 = [(x+y)^2 + z(2-xy)]^2 \le [(x+y)^2 + z^2][2^2+(2-xy)^2] = (9+2xy)(8-4xy+x^2y^2) = 72 - 20xy + x^2y^2 + 2x^3y^3 = 100 + (xy+2)^2(2xy-7)$.

Từ $|x| \le |y| \le |z|$ suy ra $z^2 \ge 3$. Suy ra $2xy \le x^2 + y^2 \le 6$, tức là $(xy+2)^2(2xy-7) \le 0$. Từ đây, kết hợp với đánh giá trên đây ta được điều cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x+y)/2 = z/(2-xy)$ và $xy+2 = 0$. Từ đây giải ra được $x = -1$, $y = 2$, $z = 2$.

Kỹ thuật chuẩn hóa cho phép chúng ta biến một bất đẳng thức phức tạp thành một bất đẳng thức có dạng đơn giản hơn. Điều này giúp ta có thể áp dụng các biến đổi đại số một cách dễ dàng hơn, thay vì phải làm việc với các biểu thức cồng kềnh ban đầu. Đặc biệt, sau khi chuẩn hóa xong, ta vẫn có thể áp dụng phương pháp dồn biến để giải. Ta đưa ra lời giải thứ hai cho bài toán trên:

Đặt $f(x, y, z) = 2(x+y+z) - xyz$. Ta cần chứng minh $f(x, y, z) \le 10$ với $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Xét $f(x, \sqrt{(y^2+z^2)/2}, \sqrt{(y^2+z^2)/2}) - f(x, y, z) = 2(x + 2\sqrt{(y^2+z^2)/2}) - x(y^2+z^2)/2 - 2(x+y+z) + xyz = 2(\sqrt{2(y^2+z^2)} - y - z) - x(y-z)^2/2 = (y-z)^2[2/(\sqrt{2(y^2+z^2)} + y + z) - x/2]$.

+ Nếu $x, y, z > 0$, ta xét hai trường hợp:

- $1 \le x \le y \le z$. Khi đó $2(x+y+z) - xyz \le 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} - 1 = 6\sqrt{3} - 1 < 10$

- $0 < x \le 1$. Khi đó $2(x+y+z) - xyz < 2(x+y+z) \le 2x + 2\sqrt{2(y^2+z^2)} = 2x + 2\sqrt{2(9-x^2)} = g(x)$. Ta có $g'(x) = 2 - 2\sqrt{2}x/\sqrt{9-x^2} > 0$, suy ra $g(x) \le g(1) = 10$.

+ Nếu trong 3 số x, y ,z có một số âm, không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x < 0$. Khi đó $f(x, \sqrt{(y^2+z^2)/2}, \sqrt{(y^2+z^2)/2}) - f(x, y, z) \ge 0$ và ta đưa bài toán việc chứng minh $f(x, \sqrt{(y^2+z^2)/2}, \sqrt{(y^2+z^2)/2}) \le 10$, hay

$$2x + 2\sqrt{2(9-x^2)} - x(9-x^2)/2 \le 10$$

$$\Leftrightarrow \quad h(x) = x^3 - 5x + 4\sqrt{2(9-x^2)} \le 20.$$

Ta có: $h'(x) = 3x^2 - 5 - 4x\sqrt{2}/\sqrt{(9-x^2)}$. Giải phương trình $h'(x) = 0$ (với $x < 0$), ta được $x = -1$. Đây là điểm cực đại của h, do đó $h(x) \le h(-1) = 20$.

Bằng cách chuẩn hóa, ta có thể đưa một bài toán bất đẳng thức về bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của một hàm số trên một miền (chẳng hạn trên hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ như ở ví dụ 4). Điều này cho phép chúng ta vận dụng được một số kỹ thuật tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (ví dụ như bất đẳng thức Jensen, hàm lồi ...)

<u>Ví dụ 5:</u> Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(b+c-a)^2/[(b+c)^2+a^2] + (c+a-b)^2/[(c+a)^2+b^2] + (a+b-c)^2/[(a+b)^2+c^2] \ge 3/5$$

<u>Giải:</u> Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho các số dương a, b, c thoả $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$(1-2a)^2/(2a^2-2a+1) + (1-2b)^2/(2b^2-2b+1) + (1-2c)^2/(2c^2-2c+1) \ge 3/5$$

$$\Leftrightarrow 1/(2a^2-2a+1) + 1/(2b^2-2b+1) + 1/(2c^2-2c+1) \le 27/5$$

$$\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \le 27/5 \text{ với } f(x) = 1/(2x^2-2x+1) \qquad (5.1)$$

Để ý rằng $27/5 = 3f(1/3)$, ta thấy (5.1) có dạng bất đẳng thức Jensen. Tuy nhiên, tính đạo hàm bậc hai của f(x), ta có

$$f''(x) = -4(6x^2 - 6x + 1)/(2x^2-2x+1)^3$$

hàm chỉ lồi trên khoảng $((3 - \sqrt{3})/6, (3 + \sqrt{3})/6)$ nên không thể áp dụng bất đẳng thức Jensen một cách trực tiếp. Ta chứng minh $f(a) + f(b) + f(c) \le 27/5$ bằng các nhận xét bổ sung sau:

$f_{max} = f(1/2) = 2$

f(x) tăng trên (0, 1/2) và giảm trên (1/2, 1)

$f((3 - \sqrt{3})/6) = f((3 + \sqrt{3})/6) = 12/7$

Nếu có ít nhất 2 trong 3 số a, b, c nằm trong khoảng $((3 - \sqrt{3})/6, (3 + \sqrt{3})/6)$, chẳng hạn là a, b thì áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$f(a) + f(b) \le 2f((a+b)/2) = 2f((1-c)/2) = 4/(c^2+1)$$

Như vậy trong trường hợp này ta chỉ cần chứng minh

$$1/(2c^2-2c+1) + 4/(1+c^2) \le 27/5$$

Quy đồng mẫu số và rút gọn ta được bất đẳng thức tương đương

$$27c^4 - 27c^3 + 18c^2 - 7c + 1 \ge 0$$

$\Leftrightarrow \quad (3c-1)^2(3c^2 - c + 1) \ge 0$ (đúng).

Như vậy ta chỉ còn cần xét trường hợp có ít nhất hai số nằm ngoài khoảng $((3 - \sqrt{3})/6, (3 + \sqrt{3})/6)$. Nếu chẳng hạn $a \ge (3 + \sqrt{3})/6)$ thì rõ ràng $b, c \le (3 - \sqrt{3})/6$ và như vậy, do nhận xét trên $f(a) + f(b) + f(c) \le 36/7 < 27/5$. Ta chỉ còn duy nhất một trường hợp cần xét là có hai số, chẳng hạn $a, b \le (3 - \sqrt{3})/6$. Lúc này, do $a + b \le 1 - \sqrt{3}/3$ nên $c \ge \sqrt{3}/3 > 1/2$. Theo các nhận xét trên ta có $f(a) + f(b) + f(c) \le 2f((3 - \sqrt{3})/6) + f(\sqrt{3}/3) = 24/7 + (15+6\sqrt{3})/13 \sim 5.381 < 5.4 = 27/5$.

Ghi chú: Bài toán trên có một cách giải ngắn gọn và độc đáo hơn như sau:
Bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$(b+c)a/[(b+c)^2+a^2] + (c+a)b/[(c+a)^2+b^2] + (a+b)c/[(a+b)^2+c^2] \le 6/5$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a + b + c = 1$. Khi đó bất đẳng thức viết lại thành

$$(1-a)a/(1-2a+2a^2) + (1-b)b/(1-2b+2b^2) + (1-c)c/(1-2c+2c^2) \le 6/5$$

Ta có $2a(1-a) \le (a+1)^2/4$. Do đó $1 - 2a + 2a^2 \ge 1 - (a+1)^2/4 = (1-a)(3+a)/4$.
Từ đó $(1-a)a/(1-2a+2a^2) \le (1-a)a/[(1-a)(3+a)/4] = 4a/(3+a)$.
Tương tự $(1-b)b/(1-2b+2b^2) \le 4b/(3+b)$, $(1-c)c/(1-2c+2c^2) \le 4c/(3+c)$
Và để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh

$$4a/(3+a) + 4b/(3+c) + 4c/(3+c) \le 6/5$$

Bất đẳng thức cuối cùng này tương đương với

$1/(3+a) + 1/(3+b) + 1/(3+c) \ge 9/10$ là hiển nhiên (Áp dụng BĐT Cauchy)

Chuẩn hóa là một kỹ thuật cơ bản. Tuy nhiên, kỹ thuật đó cũng đòi hỏi những kinh nghiệm và độ tinh tế nhất định. Trong ví dụ trên, tại sao ta lại chuẩn hóa $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ mà không phải là $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (tự nhiên hơn)? Và ta có đạt được những hiệu quả mong muốn không nếu như chuẩn hóa $x+y+z = 1$? Đó là những vấn đề mà chúng ta phải suy nghĩ trước khi thực hiện bước chuẩn hóa.

3.3. Phương pháp trọng số

Bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Bunhiacopsky là những bất đẳng thức thuần nhất. Vì thế, chúng rất hữu hiệu trong việc chứng minh các bất đẳng thức thuần nhất. Tuy nhiên, do điều kiện xảy ra dấu bằng của các bất đẳng thức này rất nghiêm ngặt nên việc áp dụng một cách trực tiếp và máy móc đôi khi khó đem lại kết quả. Để áp dụng tốt các bất đẳng thức này, chúng ta phải nghiên cứu kỹ điều kiện xảy ra dấu bằng và áp dụng phương pháp trọng số.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực không âm thì

$$6(-x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) + 27xyz \le 10(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

Giải: Sử dụng nguyên lý cơ bản « dấu bằng xảy ra khi một cặp biến số nào đó bằng nhau », ta có thể tìm ta được dấu bằng của bất đẳng thức trên xảy ra khi $y = z = 2x$. Điều này cho phép chúng ta mạnh dạn đánh giá như sau

$10(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 6(-x+y+z)(x^2+y^2+z^2) =$
$(x^2+y^2+z^2)[10(x^2+y^2+z^2)^{1/2} - 6(-x+y+z)] = (x^2+y^2+z^2)[(10/3)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(1+2^2+2^2)^{1/2} - 6(-x+y+z)] \geq (x^2+y^2+z^2)[(10/3)(x+2y+2z) - 6(-x+y+z)]$
$= (x^2+y^2+z^2)(28x+2y+2z)/3.$ (5.1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$x^2+y^2+z^2 = x^2 + y^2/4 + y^2/4 + y^2/4 + y^2/4 + z^2/4 + z^2/4 + z^2/4 + z^2/4 \geq 9(x^2y^8z^8/4^8)^{1/9}$

$28x + 2y + 2z = 4x + 4x + 4x + 4x + 4x + 4x + 4x + 2y + 2z \geq 9(4^8x^7yz)^{1/9}$

Nhân hai bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$(x^2+y^2+z^2)(28x+2y+2z) \geq 9(x^2y^8z^8/4^8)^{1/9}9(4^8x^7yz)^{1/9} = 81$ (5.2)

Từ (5.1) và (5.2) ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Trong ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng cả bất đẳng thức Bunhiacopsky và bất đẳng thức Cauchy có trọng số. Lời giải rất hiệu quả và ấn tượng. Tuy nhiên, sự thành công của lời giải trên nằm ở hai dòng ngắn ngủi ở đầu. Không có được « dự đoán » đó, khó có thể thu được kết quả mong muốn. Dưới đây ta sẽ xét một ví dụ về việc chọn các trọng số thích hợp bằng phương pháp hệ số bất định để các điều kiện xảy ra dấu bằng được thoả mãn.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng nếu $0 \leq x \leq y$ thì ta có bất đẳng thức

$$13x(y^2-x^2)^{1/2} + 9x(y^2+x^2)^{1/2} \leq 16y^2 \quad (6.1)$$

Giải: Ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các tích ở vế trái. Tuy nhiên, nếu áp dụng một cách trực tiếp thì ta được

$$VT \leq 13(x^2 + y^2-x^2)/2 + 9(x^2+y^2+x^2)/2 = 9x^2 + 11y^2 \quad (6.2)$$

Đây không phải là điều mà ta cần (Từ đây chỉ có thể suy ra $VT \leq 20y^2$). Sở dĩ ta không thu được đánh giá cần thiết là vì dấu bằng không thể đồng thời xảy ra ở hai lần áp dụng bất đẳng thức Cauchy. Để điều chỉnh, ta đưa vào các hệ số dương a, b như sau :

$$VT = (13/a)ax.(y^2-x^2)^{1/2} + (9/b)bx(y^2+x^2)^{1/2}$$
$$\leq (13/2a)(a^2x^2+y^2-x^2) + (9/2b)(b^2x^2+y^2+x^2) \quad (6.3)$$

Đánh giá trên đúng với mọi $a, b > 0$ (chẳng hạn với $a=b=1$ ta được 6.2) và ta sẽ phải chọn a, b sao cho

a) Vế phải không phụ thuộc vào x
b) Dấu bằng có thể đồng thời xảy ra ở hai bất đẳng thức

Yêu cầu này tương đương với hệ

$13(a^2-1)/2a + 9(b^2+1)/2b = 0$
$\exists\, x,y :\ a^2x^2 = y^2-x^2,\ b^2x^2 = y^2+x^2$

Tức là có hệ $13(a^2-1)/2a + 9(b^2+1)/2b = 0$, $a^2+1 = b^2 - 1$. Giải hệ ra, ta được $a = 1/2$, $b = 3/2$. Thay hai giá trị này vào (6.3) ta được

$$VT \leq 13(x^2/4 + y^2 - x^2) + 3(9x^2/4 + y^2 + x^2) = 16y^2.$$

Ghi chú: Trong ví dụ trên, thực chất ta đã cố định y và tìm giá trị lớn nhất của vế trái khi x thay đổi trong đoạn [0, y].

4. Bất đẳng thức thuần nhất đối xứng

Khi gặp các bất đẳng thức dạng đa thức thuần nhất đối xứng, ngoài các phương pháp trên, ta còn có thể sử dụng phương pháp khai triển trực tiếp và dụng định lý về nhóm các số hạng. Phương pháp này cồng kềnh, không thật đẹp nhưng đôi lúc tỏ ra khá hiệu quả. Khi sử dụng bằng phương pháp này, chúng ta thường dùng các ký hiệu quy ước sau để đơn giản hóa cách viết:

$$\Sigma_{sym}Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma_\sigma Q(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

trong đó σ chạy qua tất cả các hoán vị của {1, 2, ..., n}. Ví dụ với n = 3 và ba biến số x, y, z thì

$\Sigma_{sym}x^3 = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3$, $\Sigma_{sym}x^2y = x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2$, $\Sigma_{sym}xyz = 6xyz$.

Đối với các biểu thức không hoàn toàn đối xứng, ta có thể sử dụng ký hiệu hoán vị vòng quanh như sau: $\Sigma_{cyclic}x^2y = x^2y + y^2z + z^2x$.

Phương pháp này được xây dựng dựa trên tính so sánh được của một số tổng đối xứng cùng bậc - định lý về nhóm các số hạng (hệ quả của bất đẳng thức Karamata) mà chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh dưới đây. Trong trường hợp 3 biến, ta còn có đẳng thức Schur.

Nếu $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ và $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ là hai dãy số không tăng. Ta nói rằng s là *trội* của t nếu $s_1 + s_2 + \ldots + s_2 = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ và $s_1 + \ldots + s_i \geq t_1 + \ldots + t_i$ với mọi i=1,2, ..., n.

Định lý: (« Nhóm ») Nếu s và t là các dãy số thực không âm sao cho s là trội của t thì

$$\Sigma_{sym}x_1^{s1}\ldots x_n^{sn} \geq \Sigma_{sym}x_1^{t1}\ldots x_n^{tn}$$

Chứng minh: Đầu tiên ta chứng minh rằng nếu s là *trội* của t thì tồn tại các hằng số không âm k_σ, với σ chạy qua tập hợp tất cả các hoán vị của {1, 2, ..., n}, có tổng bằng 1 sao cho

$$\Sigma_\sigma k_\sigma(s_{\sigma1},\ldots,s_{\sigma n}) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Sau đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy như sau

$$\Sigma_\sigma x_1^{s\sigma(1)}\ldots x_n^{s\sigma(n)} = \Sigma_{\sigma,\tau}k_\tau x_1^{s\sigma(\tau(1))}\ldots x_n^{s\sigma(\tau(n))} \geq \Sigma_\sigma x_1^{t\sigma(1)}\ldots x_n^{t\sigma(n)}.$$

Ví dụ, với s = (5, 2, 1) và t = (3, 3, 2), ta có

$$(3,3,2) = (3/8)*(5, 2, 1) + (3/8)*(2, 5, 1) + (1/8)*(2,1,5) + (1/8)*(1,2,5)$$

Và ta có đánh giá

$$(3x^5y^2z + 3x^2y^5z + x^2yz^5 + xy^2z^5)/8 \geq x^3y^3z^2$$

Cộng bất đẳng thức trên và các bất đẳng thức tương tự, ta thu được bất đẳng thức $\Sigma_{sym}x^5y^2z \geq \Sigma_{sym}x^3y^3z^2$.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$1/(a^3+b^3+abc) + 1/(b^3+c^3+abc) + 1/(c^3+a^3+abc) \leq 1/abc$$

Giải: Quy đồng mẫu số và nhân hai vế cho 2, ta có

$$\Sigma_{sym}(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)abc \leq 2(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Sigma_{sym}a^7bc+3a^4b^4c+4a^5b^2c^2+a^3b^3c^3 \leq \Sigma_{sym}a^3b^3c^3+2a^6b^3+3a^4b^4c+2a^5b^2c^2+a^7bc$$

$$\Leftrightarrow \quad \Sigma_{sym}2a^6b^3 - 2a^5b^2c^2 \geq 0,$$

Bất đẳng thức này đúng theo định lý nhóm.

Trong ví dụ trên, chúng ta đã gặp may vì sau khi thực hiện các phép biến đổi đại số, ta thu được một bất đẳng thức tương đối đơn giản, có thể áp dụng trực tiếp định lý nhóm. Tuy nhiên, không phải trường hợp nào định lý này cũng đủ để giải quyết vấn đề. Trong trường hợp 3 biến số, ta có một kết quả rất đẹp khác là định lý Schur.

Định lý: (Schur). Cho x, y, z là các số thực không âm. Khi đó với mọi $r > 0$,

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay khi hai trong ba số x, y, z bằng nhau còn số thứ ba bằng 0.

Chứng minh: Vì bất đẳng thức hoàn toàn đối xứng đối với ba biến số, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$(x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0,$$

và mỗi một thừa số ở vế trái đều hiển nhiên không âm.

Trường hợp hay được sử dụng nhất của bất đẳng thức Schur là khi $r = 1$. Bất đẳng thức này có thể viết lại dưới dạng

$$\Sigma_{sym} x^3 - 2x^2y + xyz \geq 0.$$

Đây chính là bất đẳng thức ở ví dụ 1.

Ví dụ 8: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca)(1/(a+b)^2 + 1/(b+c)^2 + 1/(c+a)^2) \geq 9/4$$

Giải: Quy đồng mẫu số, khai triển và rút gọn, ta được

$$\Sigma_{sym} 4a^5b - a^4b^2 - 3a^3b^3 + a^4bc - 2a^3b^2c + a^2b^2c^2 \geq 0 \qquad (8.1)$$

Dùng bất đẳng thức Schur: $x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$. Nhân hai vế với 2xyz rồi cộng lại, ta được

$$\Sigma_{sym} a^4bc - 2a^3b^2c + a^2b^2c^2 \geq 0 \qquad (8.2)$$

Ngoài ra áp dụng định lý nhóm (hay nói cách khác - bất đẳng thức Cauchy có trọng số) ta có $\Sigma_{sym} (a^5b - a^4b^2) + 3(a^5b - 3a^3b^3) \geq 0.$ (8.3)

Từ 8.2, 8.3 suy ra 8.1 và đó chính là điều phải chứng minh.

Nói đến bất đẳng thức thuần nhất đối xứng, không thể không nói đến các hàm số đối xứng cơ bản. Đó là các biểu thức $S_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n$, $S_2 = \Sigma x_ix_j$, ..., $S_n = x_1x_2...x_n$. Với các bất đẳng thức liên quan đến các hàm đối xứng này, có một thủ thuật rất hữu hiệu được gọi là « thủ thuật giảm biến số bằng định lý Rolle ». Chúng ta trình bày ý tưởng của thủ thuật này thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 9: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$[(ab+ac+ad+bc+bd+cd)/6]^{1/2} \geq [(abc+abd+acd+bcd)/4]^{1/3}$$

Giải: Đặt $S_2 = ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $S_3 = abc+abd+acd+bcd$. Xét đa thức $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + S_2x^2 - S_3x + abcd$. P(x) có 4 nghiệm thực a, b, c, d (nếu có các nghiệm trùng nhau thì đó là nghiệm bội). Theo định lý Rolle, P'(x) cũng có 3 nghiệm (đều dương) u, v, w. Do P'(x) có hệ số cao nhất bằng 4 nên

$$P'(x) = 4(x-u)(x-v)(x-w) = 4x^3 - 4(u+v+w)x^2 + 4(uv+vw+wu)x - 4uvw$$

Mặt khác

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2S_2x - S_3$$

suy ra $S_2 = 2(uv+vw+wu)$, $S_3 = 4uvw$ và bất đẳng thức cần chứng minh ở đầu bài có thể viết lại theo ngôn ngữ u, v, w là

$$[(uv+vw+wu)/3]^{1/2} \geq (uvw)^{1/3}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

5. Thuần nhất hóa bất đẳng thức không thuần nhất

Trong các phần trên, chúng ta đã trình bày các phương pháp cơ bản để chứng minh một bất đẳng thức thuần nhất. Đó không phải là tất cả các phương pháp (và dĩ nhiên không bao giờ có thể tìm được tất cả!), tuy vậy có thể giúp chúng ta định hướng tốt khi gặp các bất đẳng thức thuần nhất. Nhưng nếu gặp bất đăng thức không thuần nhất thì sao nhỉ? Có thể bằng cách nào đó để đưa các bất đẳng thức không thuần nhất về các bất đẳng thức thuần nhất và áp dụng các phương pháp nói trên được không?

Câu trả lời là có. Trong hầu hết các trường hợp, các bất đẳng thức không thuần nhất có thể đưa về bất đẳng thức thuần nhất bằng một quá trình mà ta gọi là thuần nhất hóa. Chúng ta không thể "chứng minh" một "định lý" được phát biểu kiểu như thế, nhưng có hai lý do để tin vào nó: thứ nhất, thực ra chỉ có các đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh được, còn các đại lượng khác bậc chỉ so sánh được trong các ràng buộc nào đó. Thứ hai, nhiều bất đẳng thức không thuần nhất đã được "tạo ra" bằng cách chuẩn hóa hoặc thay các biến số bằng các hằng số. Chỉ cần chúng ta đi ngược lại quá trình trên là sẽ tìm được nguyên dạng ban đầu.

Một ví dụ rất đơn giản cho lý luận nêu trên là từ bất đẳng thức thuần nhất $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$, bằng cách cho $z = 1$, ta được bất đẳng thức không thuần nhất $x^3 + y^3 + 1 \geq x^2y + y^2 + x$.

Ví dụ 10: Cho p, q, r là các số thực dương thoả mãn điều kiện $p + q + r = 1$. Chứng minh rằng $7(pq+qr+rp) \leq 2 + 9pqr$.

(Vô địch Anh, 1999)

Ví dụ 11: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng $(a - 1 + 1/b)(b - 1 + 1/c)(c - 1 + 1/a) \leq 1$.

(IMO, 2000)

Hướng dẫn: Đặt $a = x/y$, $b = y/z$, $c = z/x$!

Ví dụ 12: Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

(IMO, 1983)

Hướng dẫn: Đặt $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$!

Bài tập

1. Cho x, y, z > 0. Chứng minh rằng
$x^3/y^3 + x^3/z^3 + y^3/x^3 + y^3z^3 + z^3/x^3 + z^3/y^3 \geq x^2/yz + y^2/zx + z^2/xy + yz/x^2 + zx/y^2 + xy/z^2$

2. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực dương x, y, z :
$$x/(x+y)(x+z) + y/(y+z)(y+x) + z/(z+x)(z+y) \leq 9/4(x+y+z).$$

3. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện
$$2x + 4y + 7z = 2xyz$$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y + z$.

4. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng $a + b + c \le 3$.

5. (IMO, 1984). Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le 7/27.$$

6. (Iran, 1996). Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \ge \frac{9}{4}$$

7. (Việt Nam, 1996) Cho a, b, c, d là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $2(ab+ac+ad+bc+bd+ca) + abc + bcd + cda + dab = 16$. Chứng minh rằng

$$3(a + b + c + d) \ge 2(ab+ac+ad+bc+bd+ca)$$

8. (Ba Lan, 1996) Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \le \frac{9}{10}$$

9. (Ba Lan, 1991) Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$x + y + z \le 2 + xyz.$$

10. (IMO, 2001). Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

Vấn đề 4. ỨNG DỤNG CỦA BĐT CÔ-SI VÀO ĐẠI SỐ

Bài 1: : Giả sử phương trình $x^5 - x^3 + x - 2 = 0$ có nghiệm thực x_0. Chứng minh rằng: $\sqrt[6]{3} < x_0 < \sqrt[6]{4}$

Giải:

Vì x_0 là nghiệm của phương trình đã cho, nên $x_0 \ne 0$, $x_0 \ne 1$ và $x_0^5 - x_0^3 + x_0 = 2$

Nhân cả hai vế của (*) với $x_0 + \frac{1}{x_0}$ thu được $x_0^6 + 1 = 2\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)$. Vì vế trái luôn dương, cho nên từ vế phải có $x_0 > 0$. Ap dụng BĐT Cauchy có:

$$x_0^6 + 1 = 2\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) \ge 4$$

Lưu ý rằng $x_0 \ne 1$ nên có BĐT thật sự. Do đó $x_0^6 > 3$ và vì $x_0 > 0$, ta có $\sqrt[6]{3} < x_0$.

Chia cả hai vế của (*) cho x_0^3 dẫn đến:

$$\frac{2}{x_0^3}+1=x_0^2+\frac{1}{x_0^2}>2 \qquad \text{và do đó} \qquad x_0<\sqrt[6]{4}$$

Tóm lại $\sqrt[6]{3}<x_0<\sqrt[6]{4}$

Bài 2: Có 4 viên bi mà tổng khối lượng của từng cặp viên bi là a, b, c, d, e, f và thỏa mãn: $a + b + c + d + e + f = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = 6$ (đvkl). Tìm khối lượng của các viên bi đó.

Giải : Kí hiệu x, y, z, t là khối lượng của 4 viên bi.

Rõ ràng a, b, c, d, e, f là các số dương. Ap dụng BĐT Cauchy , ta có:

$$a^3+2=a^3+1+1\ge 3\sqrt[3]{a^3.1.1}=3a$$

Tương tự ta cũng có: $b^3+2\ge 3b$; $c^3+2\ge 3c$; $d^3+2\ge 3d$; $e^3+2\ge 3e$; $f^3+2\ge 3f$

Cộng từng vế các BĐT trên , ta được:

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3+12\ge 3(a+b+c+d+e+f) \qquad (1)$$

Theo đầu bài thì $a + b + c + d + e + f = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = 6$, nên đẳng thức ở (1) phải xảy ra, điều này tương đương với $a = b = c = d = e = f = 1$.

Do đó $x + y = x+ z = x + t = y + z = y + t = z + t = 1$. Suy ra $x = y = z = t = \frac{1}{2}$ (đvkl)

Nhận xét:

- Có nhiều cách để giải bài này. Cũng có thể dùng bất đẳng thức Bounhiakowski để giải bài này, các bạn hãy tìm xem sao?
- Có thể tổng quát hóa bài toán này như sau:

Cho n viên bi. Gọi k là số nguyên dương bé hơn n và đặt $m=\delta_n^k$. Gọi tổng khối lượng của từng nhóm k viên bi là $a_1, a_2, ..., a_m$. Biết rằng:

$$a_1+a_2+...+a_m=a_1^p+a_2^p+...+a_m^p\ge m \text{ (dvkl) } (p\in \square^+, p\ne 1)$$

Tìm khối lượng của các viên bi đó.

Bài 3: Gọi a, b, c là các độ dài 3 cạnh của một tam giác có diện tích là A. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2$ có GTNN là $4\sqrt{3}A$.

(Đề thi Olympic Toán Quốc Tế IMO năm 1961)

Giải: Ta có công thức Héron:

$$A=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}.\frac{a+b-c}{2}.\frac{a-b+c}{2}.\frac{b+c-a}{2}}$$

Do tính chất tổng hai cạnh tong một tam giác luôn lớn hơn cạnh thứ ba, ta thấy rằng tất cả các thừa số trên đều dương. Vì vậy, áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số ta có:

$$4A=\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$$

$$\le\sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}}=\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \qquad (*)$$

Mặt khác:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\le a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$$

Nên thay vào (*) ta được:

$$4A \le \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}A$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 4: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc Tế IMO năm 1983, Mỹ đề nghị)

Giải: Do a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác mà trong tam giác luôn có đường tròn nội tiếp nên luôn tồn tại x, y, z sao cho: $a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x$ (x, y, z chính là khoảng cách từ đỉnh tam giác đến tiếp điểm giữa đường tròn nội tiếp với cạnh kề đỉnh đó) và dĩ nhiên $x,y,z>0$. Sau những biến đổi cần thiết, bất đăng thức cần chứng minh trở thành:

$$xy^3+yz^3+zx^3 \ge xyz(x+y+z)$$

Ap dụng BĐT Cauchy ta được: $(xy^3+yz^3+zx^3)(x+y+z)\ge xyz(x+y+z)^2 \ge 0$

Từ đó suy ra bất đăng thức cần chứng minh là đúng, dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{xy^3}{z}=\frac{yz^3}{x}=\frac{zx^3}{y} \Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$$

Bài 5: Tìm GTNN và GTLN của: $yz+zx+xy-2xyz$ trong đó x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$.

(Đề thi Olympic Toán Quốc Tế IMO năm 1984).

Giải: Ta có:

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)=1-2(x+y+z)+4(yz+zx+xy)-8xyz=4(yz+zx+xy)-8xyz-1$$

do giả thiết $x+y+z=1$. Từ đó suy ra:

$$yz+zx+xy-2xyz=\frac{1}{4}(1-2x)(1-2y)(1-2z)+\frac{1}{4}$$

Mặt khác theo BĐT Cauchy ta cũng có:

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)\le \frac{1}{27}(1-2x+1-2y+1-2z)^3=\frac{1}{27}$$

Do vậy, ta suy ra: $yz+zx+xy-2xyz \le \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{27}=\frac{7}{27}$ (1)

Ngoài ra, do giả thiết: $x+y+z=1$,ta có:

$yz+zx+xy-2xyz=xy(1-2z)+xz(1-y)+yz\ge 0$ (2)

nên kết hợp lại suy ra: $0\le yz+zx+xy-2xyz\le \frac{7}{27}$.

Mặt khác, dễ thấy đăng thức ở (1) và (2) là tồn tại, chẳng hạn khi:

$$x=y=z=\frac{1}{3} \Rightarrow yz+zx+xy-2xyz=\frac{7}{27}$$

$$x=y=0,\ z=1 \Rightarrow yz+zx+xy-2xyz=0$$

Do vậy, ta kết luận:

$$Min(yz+zx+xy-2xyz)=0$$

$$Max(yz+zx+xy-2xyz)=\frac{7}{27}$$

Bài 6: Cho a, b, c là 3 số thực dương tuỳ ý thỏa mãn điều kiện: abc = 1. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2} \qquad (1)$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc Tế IMO năm 1995)

Giải: Đặt: $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$. Khi đó xyz=1 và (1) tương đương với:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2} \qquad (2)$$

Để chứng minh bất đăng thức (2) trước hết ta cần chứng minh :

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2} \qquad (3)$$

Ap dụng BĐT Cauchy, ta được:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq x$$
$$\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geq y$$
$$\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq z$$

Cộng từng vế 3 bất đăng thức trên ta được (3). Ngoài ra cũng theo BĐT Cauchy :

$$\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra bất đăng thức (2). Suy ra đpcm.

Bài 7: Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$

cho mọi số thực dương a, b và c.

(Đề thi toán quốc tế IMO lần thứ 42 – năm 2001)

Giải: Trước hết ta chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \qquad (1)$$

$$(1)\Leftrightarrow\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2\geq a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right)$$

Từ BĐT Cauchy, ta có:

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2-\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2=\left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$\geq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}.4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc$$

Do đó: $\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2\geq\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2+8a^{\frac{2}{3}}bc=a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right)$, suy ra (1)

Một cách tương tự, ta có:

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

Cộng theo từng vế ba BĐT này ta nhận được BĐT ở đề bài.

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n≥2 ta luôn có: $\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4 của trường THPT Bình Phú năm 2002, TP HCM)

Giải: theo BĐT Cauchy:

$$\frac{\underbrace{1+1+...+1}_{(n-1)}+\left(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)}{n} > \sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}{n} > \sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} > \sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} \qquad (1)$$

Lại theo BĐT Cauchy:

$$\frac{\underbrace{1+1+...+1}_{(n-1)}+\left(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)}{n} > \sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}{n} > \sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} > \sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} \qquad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được đpcm.

Bài 9: *Cho a,b,c > 0 ;n nguyên dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n} \geq 4^n\left[\frac{1}{(2a+b+c)^n}+\frac{1}{(a+2b+c)^n}+\frac{1}{(a+b+2c)^n}\right]$$

Giải:

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm ta có

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^n}.\frac{1}{b^n}} = 2.\frac{1}{\left(\sqrt{ab}\right)^n} \geq 2.\frac{1}{\left(\frac{(a+b)}{2}\right)^n}$$

Tương tự

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{c^n}\ge\frac{2^{n+1}}{(a+c)^n}$$

$$\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\ge\frac{2^{n+1}}{(b+c)^n}$$

Do đó

$$2\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\right)\ge 2^{n+1}\left[\frac{1}{(a+b)^n}+\frac{1}{(a+c)^n}+\frac{1}{(b+c)^n}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\ge 2^n\left[\frac{1}{(a+b)^n}+\frac{1}{(a+c)^n}+\frac{1}{(b+c)^n}\right]$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\frac{1}{(a+b)^n}+\frac{1}{(a+c)^n}+\frac{1}{(b+c)^n}\ge 2^n.\left[\frac{1}{(a+b+b+c)^n}+\frac{1}{(b+c+a+c)^n}+\frac{1}{(a+b+a+c)^n}\right]$$

Do đó

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\ge 4^n\left[\frac{1}{(2a+b+c)^n}+\frac{1}{(a+2b+c)^n}+\frac{1}{(a+b+2c)^n}\right]$$

Vấn đề 5. MỘT SỐ BÀI TOÁN BĐT TRONG CÁC KỲ THI CHỌN HSG

Trong kì thi Olympic toán Quốc tế năm 2001 có bài toán sau:

Bài toán 1: Cho ba số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

Trước hết ta xét

Bài toán 2: Cho 3 số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

Đây là bất đẳng thức Nesbitt . Bất đẳng thức này có nhiều chứng minh. Sau đây là một chứng minh của nó .

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\ge 3a^{\frac{1}{2}}b$

$$a^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\ge 3a^{\frac{1}{2}}c\ \Rightarrow 2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})\ge 3a^{\frac{1}{2}}(b+c)$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b+c}\ge\frac{3a^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{c+a} \geq \frac{3b^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}$ và $\frac{c}{a+b} \geq \frac{3c^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}$

Từ đó suy ra : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Chúng ta áp dụng phương pháp giải bài toán 2 để giải bài toán 1 . Ta chứng minh rằng tồn tại số thực α sao cho .

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^\alpha}{a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha} \quad (1)$$

Thật vậy bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow$ a $(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha) \geq a^\alpha\sqrt{a^2+8bc}$

$\Leftrightarrow a^2(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)^2 \geq a^{2\alpha}(a^2+8bc)$

$\Leftrightarrow a^2[a^{2\alpha}+2a^\alpha(b^\alpha+c^\alpha)+(b^\alpha+c^\alpha)^2] \geq a^{2\alpha+2}+8a^{2\alpha}bc$

$\Leftrightarrow 2a^{\alpha+2}(b^\alpha+c^\alpha)+a^2(b^\alpha+c^\alpha)^2 \geq 8a^{2\alpha}bc$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $b^\alpha+c^\alpha \geq 2\sqrt{b^\alpha c^\alpha}$

$\Rightarrow 2a^{\alpha+2}(b^\alpha+c^\alpha)+a^2(b^\alpha+c^\alpha)^2 \geq 4a^{\alpha+2}b^{\frac{\alpha}{2}}c^{\frac{\alpha}{2}}+4a^2b^\alpha c^\alpha$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $a^{\alpha+2}b^{\frac{\alpha}{2}}c^{\frac{\alpha}{2}}+a^2b^\alpha c^\alpha \geq 2a^{2+\frac{\alpha}{2}}b^{\frac{3\alpha}{4}}c^{\frac{3\alpha}{4}}$

Ta chọn α thoả mãn $\begin{cases} 2+\frac{\alpha}{2}=2\alpha \\ \frac{3\alpha}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\frac{4}{3}$

Vậy $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$

$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$

Bài toán sau tương tự với bài toán 2

Bài toán 3: Cho 4 số thực dương a,b,c.d . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}}+\frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geq 1$$

Bằng phương pháp đã được sử dụng trong lời giải của bài toán 2 ta chứng minh được. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} \geq \dfrac{a^{\frac{21}{16}}}{a^{\frac{21}{16}}+b^{\frac{21}{16}}+c^{\frac{21}{16}}+d^{\frac{21}{16}}}$

$$\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}} \geq \frac{b^{\frac{21}{16}}}{a^{\frac{21}{16}}+b^{\frac{21}{16}}+c^{\frac{21}{16}}+d^{\frac{21}{16}}}$$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}} \geq \frac{c^{\frac{21}{16}}}{a^{\frac{21}{16}}+b^{\frac{21}{16}}+c^{\frac{21}{16}}+d^{\frac{21}{16}}}$$

$$\frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geq \frac{d^{\frac{21}{16}}}{a^{\frac{21}{16}}+b^{\frac{21}{16}}+c^{\frac{21}{16}}+d^{\frac{21}{16}}}$$

Suy ra $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}+\dfrac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}}+\dfrac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}}+\dfrac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geq 1$

Bài toán 4 : Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn abc = 1 . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

(Đề thi toán Quốc tế năm 1995)

Lời giải : Đặt x = $\dfrac{1}{a}$, y = $\dfrac{1}{b}$, z = $\dfrac{1}{c}$ (x,y,z > 0) . Khi đó xyz = 1

và bất đẳng thức (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)(2x+2y+2z) \geq (x+y+z)^2$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y} \geq \dfrac{x+y+z}{2} \geq \dfrac{3}{2}$ (vì x+y+z $\geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$)

Bài toán sau là một bài toán tổng quát của bài toán 4

Bài toán 5: Tìm tất cả các số thực α sao cho bất đẳng thức

$\dfrac{1}{a^{\alpha}(b+c)}+\dfrac{1}{b^{\alpha}(c+a)}+\dfrac{1}{c^{\alpha}(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}$ (3) đúng với mọi bộ 3 số thực dương a.b.c

thoả mãn abc = 1

Lời giải: Xét $\alpha \geq 2$. Không mất tính tổng quát, giả sử a $\leq b \leq c$

Đặt x = $\frac{1}{a}$, y = $\frac{1}{b}$, z = $\frac{1}{c}$. Khi đó x,y,z > 0 và xyz = 1

Bất đẳng thức (3) $\Leftrightarrow$ $\frac{x^{\alpha-1}}{y+z}+\frac{y^{\alpha-1}}{z+x}+\frac{z^{\alpha-1}}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

Ta có $x\geq y\geq z$ $\Rightarrow$ $\frac{x}{y+z}\geq\frac{y}{z+x}\geq\frac{z}{x+y}$

Áp dụng bất đẳng thức Trêbusep ta có

$$\frac{x^{\alpha-1}}{y+z}+\frac{y^{\alpha-1}}{z+x}+\frac{z^{\alpha-1}}{x+y}\geq(x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2})\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Ta có $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$, $x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-2}}=3$

$$\Rightarrow\frac{x^{\alpha-1}}{y+z}+\frac{y^{\alpha-1}}{z+x}+\frac{z^{\alpha-1}}{x+y}\geq 3$$

Vậy với α $\geq$ 2 thì bất đẳng thức (3) đúng với mọi bộ 3 số thực dương a,b,c thoả mãn abc = 1 . Ta chứng minh rằng với $\alpha\leq$ - 1 thì bất đẳng thức (3) đúng với bộ ba số thực dương a,b,c thoả mãn điều kiện abc = 1 . Thật vậy giả sử a,b,c là 3 số thực dương thoả mãn abc = 1 . Đặt x = $\frac{1}{a}$, y = $\frac{1}{b}$, z = $\frac{1}{c}$ thì x,y,z > 0 và xyz =

1

Đặt β = 1 - $\alpha\geq 2$. Theo chứng minh trên ta có

$$\frac{1}{x^{\beta}(y+z)}+\frac{1}{y^{\beta}(z+x)}+\frac{1}{z^{\beta}(x+y)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^{\alpha}(b+c)}+\frac{1}{b^{\alpha}(c+a)}+\frac{1}{c^{\alpha}(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

Với -1 < α < $\frac{1}{2}$

Xét các dãy (a_n) , (b_n), (c_n): a_n = n , b_n = n, c_n = $\frac{1}{n^2}$ (n $\in$N*)

Đặt S_n = $\frac{1}{a_n^{\alpha}(b_n+c_n)}+\frac{1}{b_n^{\alpha}(c_n+a_n)}+\frac{1}{c_n^{\alpha}(a_n+b_n)}=\frac{2n^{2-\alpha}}{n^3+1}+\frac{n^{2\alpha-1}}{2}$

$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=0$

Xét $\alpha = \frac{1}{2}$. Xét các dãy (a_n), (b_n), (c_n): $a_n = b_n = n$, $c_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in N^*)$

Đặt $S_n = \frac{1}{a_n^\alpha(b_n + c_n)} + \frac{1}{b_n^\alpha(c_n + a_n)} + \frac{1}{c_n^\alpha(a_n + b_n)} = \frac{2n^{2-\alpha}}{n^3+1} + \frac{n^{2\alpha-1}}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$

Với $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ .Xét các dãy (a_n), (b_n), (c_n) sao cho $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = n^2 (n \in N^*)$

Đặt $S_n = \frac{1}{a_n^\alpha(b_n + c_n)} + \frac{1}{b_n^\alpha(c_n + a_n)} + \frac{1}{c_n^\alpha(a_n + b_n)} = \frac{2n^{\alpha+1}}{n^3+1} + n^{1-2\alpha} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 0$

Vậy tập các giá trị α cần tìmlà $(-\infty, -1] \cup [2; +\infty)$

Bài toán 6: Cho 3 số thực không âm x,y,z thoả mãn điều kiện x+y+z = 1 . Chứng minh rằng $0 \le xy+yz+zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$

(Đề thi Olympic toán Quốc tế năm 1984)

Bài toán sau là bài toán tổng quát của bài toán 6

Bài toán 7: Cho số thực k . Xét các số thực không âm x,y,z thoả mãn điều kiện x+y+z = 1 . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$E = xy + yz + xz - k\,xyz$

Lời giải của bài toán 7 : Trước hết ta tìm giá trị lớn nhất của E . Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \le \frac{1}{27}$

Giả sử $x \ge y \ge z$

Trường hợp 1: $y + z \le x \Rightarrow (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \le 0 \le xyz$

Trường hợp 2: $y + z > x \Rightarrow y+z-x > 0,\ z+x-y > 0,\ x+y-z > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$\sqrt{(y+z-x)(z+x-y)} \le z,\quad \sqrt{(z+x-y)(x+y-z)} \le x$

$\sqrt{(x+y-z)(y+z-x)} \le y,\ \Rightarrow\ (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \le xyz$

Trong mọi trường hợp ta đều có

$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \le xyz$

$\Rightarrow (1-2x)(1-2y)(1-2z) \le xyz \Rightarrow 4(xy+yz+zx) - 9xyz \le 1$

$\Rightarrow xy + yz + zx - \frac{9}{4}xyz \le \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x=y=z = $\frac{1}{3}$ hoặc trong số x,y,z có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng $\frac{1}{2}$

Nếu k < $\frac{9}{4}$ thì E = xy +yz + zx - $\frac{9}{4}xyz + (\frac{9}{4} - k)xyz \le \frac{1}{4} + (\frac{9}{4} - k)\frac{1}{27}$

$\Rightarrow E \le \frac{1}{3} - \frac{k}{27}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x=y=z = $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ giá trị lớn nhất của E là $\frac{9-k}{27}$

Nếu k> $\frac{9}{4}$ thì E = = xy +yz + zx - $\frac{9}{4}xyz + (\frac{9}{4} - k)xyz \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ E $\le \frac{1}{4}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số x,y,z có một số bằng 0 và trong hai số còn lại bằng $\frac{1}{2}$. Suy ra giá trị lớn nhất của E là $\frac{1}{4}$.

Nếu k = $\frac{9}{4}$ thì giá trị lớn nhất của E là $\frac{1}{4}$

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị nhỏ nhất của E . Giả sử $x \ge y \ge z \Rightarrow x \ge \frac{1}{3}$

Nếu k$\le$ 0 thì E $\ge$ 0 ; E = 0 khi và chỉ khi trong ba số x,y,z có hai số bằng 0 và một số bằng 1. Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 0.

Nếu 0 <k < 9 thì E $\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2} - kxyz = \sqrt[3]{(xyz)^2}(3 - k\sqrt[3]{xyz}) \ge 0$

E$\ge$0 . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi trong ba số x,y,z có hai số bằng 0 và một số bằng 1 . Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 0

Nếu k = 9 thì E = xy + yz + zx -9xyz

$$= yz(1-9x) + x(1-x) \ge \frac{(1-x)^2}{4}(1-9x) + x(1-x)$$

Ta có $\frac{(1-x)^2}{4}(1-9x) + x(1-x) = \frac{1-x}{4}(3x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow E \ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x= y=z = $\frac{1}{3}$ hoặc trong ba số x,y,z có hai số bằng 0 và một số bằng 1 . Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 0

Nếu k > 9 thì E = xy + yz + zx -9xyz +(9-k) xyz $\ge \frac{9-k}{27}$

$$\Rightarrow E \geq \frac{9-k}{27}$$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi = y=z = $\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{9-k}{27}$

Chú ý rằng với k = 2 ta nhận được lời giải của bài toán 6.

Bài toán 8: cho 3 số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$ (4) (Bất đẳng thức Schur)

Lời giải của bài toán 8

Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}$, $y = \frac{b}{a+b+c}$, $z = \frac{c}{a+b+c}$ thì x,y,z >0 và x +y+z = 1

Bất đẳng thức (4) $\Leftrightarrow$ 4(xy+yz+zx) - 9xyz $\leq$ 1 (5)

Theo chứng minh trên thì bất đẳng thức (5) đúng.

Vậy bất đẳng thức (4) đúng

Bài toán 9: Tìm tất cả các số thực r sao cho bất đẳng thức

$(r+\frac{a}{b+c})(r+\frac{b}{c+a})(r+\frac{c}{a+b}) \geq (r+\frac{1}{2})^3$ (6) đúng với mọi bộ 3 số thực dương a,b,c

(Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi toán Quốc tế năm 2009)

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức (6) đúng với mọi bộ 3 số thực dương (a,b,c)

Xét 3 dãy số (a_n) , (b_n), (c_n): $a_n = 1$, $b_n = c_n = n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow (r+\frac{1}{2n})(r+\frac{n}{n+1})(r+\frac{n}{n+1}) \geq (r+\frac{1}{2})^3$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} [(r+\frac{1}{2n})(r+\frac{n}{n+1})(r+\frac{n}{n+1})] \geq (r+\frac{1}{2})^3$$

$$\Rightarrow r(r+1)^2 \geq (r+\frac{1}{2})^3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} r \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ r \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$$

Giả sử a, b, c > 0 và a+b+c = 1

(6) $\Leftrightarrow \frac{r(b+c)+a}{b+c} \frac{r(c+a)+b}{c+a} \frac{r(a+b)+c}{a+b} \geq (r+\frac{1}{2})^3$

$\Leftrightarrow$ [r+(1-r)a] [r+(1-r)b] [r+(1-r)c] $\geq (r+\frac{1}{2})^3$ (1-a) (1- b) (1- c)

$\Leftrightarrow r^3 + r^2(1\text{-}r) + r(1\text{-}r)^2$ (ab + bc + ca) + (1-r)^3 abc $\geq (r+\frac{1}{2})^3$(ab + bc + ca - abc)

$\Leftrightarrow$ $[(r+\frac{1}{2})^3 - r(1-r)^2]$ (ab + bc + ca) - $[(r+\frac{1}{2})^3 + (1-r)^3]$ abc $\leq r^2$

$\Leftrightarrow$ ab + bc + ca - $\frac{9(4r^2-2r+1)}{28r^2-2r+1}abc \leq \frac{8r^2}{28r^2-2r+1}$ (7)

Đặt $k = \frac{9(4r^2-2r+1)}{28r^2-2r+1}$ và E = ab + bc + ca - kabc

Với $r \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ hoặc $r \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ thì $4r^2 + 2r - 1 \geq 0$

$\Rightarrow k \leq \frac{9}{4}$

Theo bài toán 7 ta có E $\leq \frac{9-k}{27} = \frac{8r^2}{28r^2-2r+1}$

Vậy (7) đúng với mọi a,b,c >0 (a+b+c =1) . Tập hợp các giá trị r cần tìm là

$(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$

Bài toán sau là một mở rộng của bài toán 7 .

Bài toán 10 : Cho số thực k. Xét các số thực không âm a,b,c,d thoả mãn điều kiện a+b+c+d = 1 . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

E = abc + abd +acd+ bcd - k abcd